L'oral à l'agrégation - Isenmann p 388
X.G Algèbre p 190 (pour le déterminant circulant)
Carnet de voyage en algébrie Caldero p 43 (pour la suite de polygônes)

149 **Développement : déterminant circulant et suite de polygônes**

152

153 **Théorème : (déterminant circulant)**

155 Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

181 Alors :
$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}$$
(on note A la matrice

191

223

226

Proposition : Soit P un polygone du plan complexe de sommets $\{z_1, \dots, z_n\}$. On définit par récurrence $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k. Alors la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de P.

Démo :

1) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$, on remarque que $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$. On diagonalise A en diagonalisant J : on calcule
$$\chi_J(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 \\ -1 & & & X \end{vmatrix} = X \cdot X^{n-1} + (-1)^{n+1}(-1)(-1)^{n-1} = X^n - 1$$

d'où $Sp(J) = \{\omega^k, \ k \in [\![0, n-1]\!]\}$. La matrice J possède n valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable : $\exists\, T \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $J = TDT^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$. Ainsi :
$$\det A = \det \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = \det \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk} \right)$$

2) On montre maintenant la proposition.

L'idée est de montrer que $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, trouver vers où elle converge et enfin prouver que les P_k ont même isobarycentre.

ORAL

On représente P_k par le vecteur $Z_k = \begin{pmatrix} z_{k,1} \\ \vdots \\ z_{k,n} \end{pmatrix}$. La relation de récurrence s'écrit :
$$Z_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2} \\ \vdots \\ \frac{z_{k,n} + z_{k,1}}{2} \end{pmatrix} = B Z_k \text{ où } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{I + A}{2}$$

et $Z_0 = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

Ainsi, $Z_k = B^k Z_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrons que $(B^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme infinie (cela impliquera la convergence pour toutes les autres normes car on est en dimension finie).

On calcule : $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_0 & \cdots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$ avec $\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} - X \\ a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = \dots = a_{m-1} = 0 \end{cases}$

D'après ①, $\chi_B(X) = \prod_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1} a_k \omega^{kj} = \prod_{j=0}^{m-1}(\lambda_j - X)$ avec $\lambda_j = \frac{1+\omega^j}{2}$

Puisque $\lambda_i = \lambda_j$ ssi? $i=j$, χ_B est scindé à racines simples et A est diagonalisable.

Il existe $Q \in GL_m(\mathbb{C})$ tel que $B = QDQ^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1})$

Or $\forall j \neq 0$, $|\lambda_j| = \left|\frac{1+\omega^j}{2}\right| = \left|e^{ij\frac{\pi}{m}} \frac{e^{ij\frac{\pi}{m}} + e^{-ij\frac{\pi}{m}}}{2}\right| = \left|\cos\left(j\frac{\pi}{m}\right)\right| < 1$

Ainsi $\lambda_j^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ pour tout $j \neq 0$. B^k converge alors vers $B_\infty = Q\,\mathrm{diag}(1,0,\dots,0)Q^{-1}$ par continuité de $M \mapsto QMQ^{-1}$ (par continuité de la conjugaison).

Soit $X = B_\infty Z_0$ tq $Z_k \to X$. Par la relation $Z_{k+1} = BZ_k$ et par continuité de la multiplication à gauche, on a $X = BX$.

Or $\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \in E_1$ de dimension 1 car χ_B a m racines distinctes simples.

Ainsi, $\exists a \in \mathbb{C}$, $X = \begin{pmatrix}a\\ \vdots \\ a\end{pmatrix}$ ie P_k converge vers $\begin{pmatrix}a\\ \vdots \\ a\end{pmatrix}$

$\forall k \in \mathbb{N}$, soit g_k l'isobarycentre de P_k qui vérifie : on suppose implicitement que $z_{k,m+1} = z_{k,0}$

$$g_{k+1} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} z_{k+1,i} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{z_{k,i}+z_{k,i+1}}{2} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} z_{k,i} = g_k$$

ou alors dire que les indices sont pris modulo m+1.

Par continuité de $(z_i) \mapsto \frac{\sum_i z_i}{m}$, g_k converge vers a.

Schéma :